

Übungsblatt 8

Differentialgleichungen für Periodenintegrale

29. Die elliptische Kurve in Hesse-Form und ihre j -Invariante.

(a) (2 Punkte) Bringen Sie die Familie von elliptische Kurven

$$\mathcal{E} = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0, a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\}$$

in Weierstrassform.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die j -Invariante der elliptischen Kurve aus Aufgabe (a).

30. Hypergeometrische Funktion.

Es sei

$${}_2F_1(a, b; c; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \lambda^n$$

die hypergeometrische Reihe. Hierbei ist $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ das Pochhammer-Symbol für $a \in \mathbb{C}$ und $\Gamma(z)$ die Gamma-Funktion.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{\pi}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(b) (1 Punkt) Leiten Sie folgende Formel her:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}}$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die hypergeometrische Reihe $F(\lambda) = {}_2F_1(a, b; c; \lambda)$ die Differentialgleichung $\lambda(1-\lambda)F''(\lambda) + (c - (1+a+b)\lambda)F'(\lambda) - abF(\lambda) = 0$ erfüllt.

31. Perioden elliptischer Kurven als hypergeometrische Funktionen

(4 Punkte) Nehmen Sie an, dass e_1, e_2, e_3 reelle Nullstellen von $4x^3 - g_2x - g_3$ sind, und dass $e_1 < e_3 < e_2$. Sei $\lambda = (e_3 - e_1)/(e_2 - e_1) \in (0, 1)$. Benützen Sie die Aufgaben 7 und 30 um folgende Formeln für die Perioden ω_1, ω_2 des Gitters L abzuleiten:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right) \\ \omega_1 &= \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \lambda\right)\end{aligned}$$

32. Hypergeometrische Gleichung in Weierstrass-Form

Sei E eine Familie von elliptischen Kurven gegeben durch $y^2 = 4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)$ parametrisiert durch $a \in \mathbb{C}$. Sei $\gamma \subset E$ eine nicht-triviale geschlossene Kurve auf E , die nicht von a abhängt. Definieren Sie die Periodenintegrale $\varpi_1(a) = \int_{\gamma} \frac{dx}{y}$ und $\varpi_2(a) = \int_{\gamma} \frac{x dx}{y}$.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{d^2 \varpi_i}{da^2} + P(a) \frac{d\varpi_i}{da} + Q(a) \varpi_i = 0 \quad i = 1, 2,$$

wobei $P(a)$ und $Q(a)$ zu bestimmende Funktionen in $g_2(a), g_3(a)$ und ihren Ableitungen sind. Drücken Sie dazu die Ableitungen nach a durch Ableitungen nach $g_{\alpha}(a)$, $\alpha = 2, 3$, aus. Zeigen Sie damit in zwei Schritten, dass

$$\frac{\partial \varpi_i}{\partial g_{\alpha}} = \sum_j C_{\alpha, j}(a) \varpi_j$$

gilt. Im ersten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{p(x)}{y^3}$ zu $\frac{q(x)}{y}$, wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind, indem Sie die Diskriminante $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$ als $\delta = Ay^2 + B(y^2)'$ schreiben. Lassen Sie dabei totale Ableitungen weg, weil Sie unter dem Integral nichts beitragen. Im zweiten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{x^n}{y}$ zu den Integranden von ϖ_i , $i = 1, 2$, indem Sie sukzessive x^2 durch y' und $g_2(a)$ ausdrücken, partiell integrieren und danach y durch $\frac{y^2}{y} = \frac{4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)}{y}$ ausdrücken. Lassen Sie dabei wieder totale Ableitungen weg.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $P(a), Q(a)$ für die elliptische Kurve in Hesse-Form aus Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von a mit der hypergeometrischen Differentialgleichung aus Aufgabe 30(c) übereinstimmt und bestimmen Sie die Werte von a, b, c .

Abgabetermin: Dienstag, 19.12.2017 um 10:00 Uhr.